

# XII ENCUENTRO ANDALUZ DE MATEMÁTICA DISCRETA

03 y 04 de febrero de 2022

Jerez de la Frontera, España

Organizado por los departamentos de Matemáticas  
y de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Cádiz

## COMITÉ ORGANIZADOR

Pilar Álvarez Ruiz - Estadística e Investigación Operativa  
Ignacio García García - Matemáticas  
Ismael González Yero - Matemáticas  
Dorota Kuziak - Estadística e Investigación Operativa  
Juan Carlos Valenzuela Tripodoro - Matemáticas  
Alberto Vigneron Tenorio - Matemáticas

<https://xiiicamd.uca.es/>

El XII ENCUENTRO ANDALUZ DE MATEMÁTICA DISCRETA se celebró en Jerez de la Frontera los días 03 y 04 de febrero de 2022 y fue organizado por miembros de los Departamentos de Matemáticas y de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Cádiz. Este es un congreso que se ha realizado de forma bianual desde que se hiciera por primera vez en la provincia de Huelva (La Rábida) en 1999.

Este documento contiene los resúmenes de los trabajos presentados en este Encuentro, los cuales son una muestra del potencial de investigación de la mayor parte de los grupos andaluces que han participado en las ediciones realizadas hasta hoy, así como una gran representación de otros grupos españoles, y de sus colaboraciones con expertos internacionales.

Mostramos ante todo, nuestro agradecimiento por el apoyo recibido de la Universidad de Cádiz y de los departamentos de Matemáticas, y de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Cádiz. Agradecemos además, la participación de los conferenciantes invitados, la profesora María Luz Puertas (Universidad de Almería) y el profesor Andrés Encinas (Universidad Politécnica de Cataluña). Y finalmente, como no puede ser de otra manera, nuestro más grato agradecimiento a todos los participantes en el Encuentro, los cuales hacen posible que estos momentos de intercambio de ideas y resultados sean una realidad.

El Comité Organizador:

Pilar Álvarez Ruiz, Ignacio García García, Ismael González Yero, Dorota Kuziak, Juan Carlos Valenzuela Tripodoro y Alberto Vignerón Tenorio.

Web del encuentro: <https://xiieamd.uca.es/>

# Tabla de contenidos

I	Charlas Invitadas	2
1	Cálculo vectorial en redes	3
2	Producto cartesiano y dominación	4
II	Ponencias	5
3	Nuevos valores exactos y cotas inferiores de números de Schur diagonales	6
4	Optimización en el posicionamiento de escáneres láser terrestres: una aplicación de la Matemática Discreta	7
5	Comparando diferentes representaciones de álgebras no asociativas mediante estructuras combinatorias	9
6	Dimensión equidistante de un grafo	10
7	La inversa de grupo de matrices circulantes con cuatro parámetros	11
8	Asymptotic $\omega$ -primality of finitely generated cancelative monoids	12
9	La importancia de las $G$ -inversas en caminos aleatorios	13
10	Dominación [5]-Romana en grafos. Generalización	14
11	Paired-domination in near-triangulations	15
12	Cooperación en sistemas ecológicos mutualistas	16
13	Hyperbolicity of some intersection graphs	17
14	Pricing in hub problems	18
15	Coloraciones totales que distinguen vértices adyacentes para el producto corona de gráficas	19

**Parte I**

**Charlas Invitadas**

# Trabajo 1

## Cálculo vectorial en redes

Andrés M. Encinas

Universitat Politècnica de Catalunya

En las últimas décadas han surgido los denominados Métodos Miméticos como una metodología que aborda los problemas de contorno de la física-matemática o de la ingeniería modelándolos directamente en un espacio discreto que aproxime en cierta forma el medio continuo, en lugar de discretizar las ecuaciones mediante las técnicas habituales de diferencias finitas, elementos finitos, elementos de volumen o métodos sin malla. Estos métodos se basan en la construcción de un cálculo vectorial en redes (grafos pesados) a través de operadores lineales que juegan el mismo papel que sus miméticos en el continuo.

En esta presentación mostraremos la construcción de un marco mimético, examinando algunas aplicaciones potenciales en el ámbito de la mecánica del medio continuo.

## Trabajo 2

# Producto cartesiano y dominación

María Luz Puertas

Universidad de Almería

Los parámetros de dominación no son fáciles de calcular en los grafos producto cartesiano. Este hecho ya se puso de manifiesto en los primeros trabajos que estudian el número de dominación y que datan de las décadas de los 50 y 60 del pasado siglo. La conjetura de Vizing, propuesta en 1963 y aún no resuelta, es todo un referente de la dificultad para manejar la dominación en el producto cartesiano.

En esta charla vamos a repasar las técnicas que llevaron al cálculo del número de dominación en el producto cartesiano de dos caminos, y cómo dichas técnicas se están modificando para avanzar en el cálculo de este parámetro en el producto cartesiano de un camino y un ciclo.

**Parte II**

**Ponencias**

## Trabajo 3

# Nuevos valores exactos y cotas inferiores de números de Schur diagonales

L. Boza, M. Pastora Revuelta, M. I. Sanz

Universidad de Sevilla

El número de Schur diagonal de  $k$  sumandos y  $n$  colores, denotado como  $S_k(n)$ , es el mayor natural  $p$  tal que existe una  $n$ -coloración de  $\{1, \dots, p\}$  de manera que para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  no hay solución monocromática de color  $i$  de la ecuación  $\sum_{j=1}^k x_j = x_{k+1}$ . En la literatura también se define este número de Schur como una unidad mayor.

Obviamente  $S_1(n) = 0$  y  $S_k(1) = k - 1$ , por lo que a partir de ahora se considerará que  $n, k \geq 2$ . El caso más estudiado en la literatura es  $k = 2$ , conociéndose los siguientes valores exactos:  $S_2(2) = 4$ ,  $S_2(3) = 13$ ,  $S_2(4) = 44$  [Golomb y Baumert, 1965] y  $S_2(5) = 160$  [Heule, 2018]. Además se tiene  $S_2(6) \geq 536$ ,  $S_2(7) \geq 1680$  [Fredricksen y Sweet, 2000] y  $S_2(m+n) \geq 2S_2(m)S_2(n) + S_2(m) + S_2(n)$  [Abbott y Hanson, 1972], por lo que  $S_2(8) \geq 5042$ ,  $S_2(9) \geq 15124$  y  $S_2(15) \geq 16944481$ . En este trabajo se obtienen las siguientes pequeñas mejoras:

$$S_2(8) \geq 5043, S_2(9) \geq 15130, S_2(15) \geq 16951203.$$

Si  $k \geq 3$ , se define  $S_k^*(n)$  como es el mayor natural  $p$  tal que existe una  $n$ -coloración de  $\{1, \dots, p\}$  de manera que para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  no hay solución monocromática de color  $i$  de la ecuación  $(k-1)x_1 + x_2 = x_3$ . Obviamente  $S_k^*(n) \geq S_k(n)$ . El cálculo computacional de  $S_k^*(n)$  es más sencillo que el de  $S_k(n)$ , sin embargo, aún así muy pocos son los valores que se pueden obtener si  $n \geq 4$ .

Sea  $T_k(n) = (k+1)^n - \sum_{j=0}^{k-1} (k+1)^j = (k-1)((k+1)^n - 1)/k+1$ . Es conocido que  $S_k(n) \geq T_k(n) - 1$  [Znám, 1966]. En este trabajo se conjetura que si  $k \geq 3$  entonces  $S_k^*(n) = T_k(n) - 1$  y consecuentemente  $S_k(n) = T_k(n) - 1$ .

Es conocido que  $S_k(2) = T_k(2) - 1 = k^2 + k - 2$  [Ahmed y Schaal, 2015] y  $S_k(3) = T_k(3) - 1 = k^3 + 2k^2 - 3$  [Boza, Marín, Revuelta y Sanz, 2019]. En este trabajo se comprueba computacionalmente la conjetura si  $2 \leq n \leq 3$ , probando  $S_k^*(2) = S_k(2)$ ,  $S_k^*(3) = S_k(3)$  y además si  $n = 4$  con  $3 \leq k \leq 6$  se obtiene:

$$S_3(4) = T_3(4) - 1 = 170, S_4(4) = T_4(4) - 1 = 468, S_5(4) = T_5(4) - 1 = 1036,$$

$$S_6(4) = T_6(4) - 1 = 2000.$$

## Trabajo 4

# Optimización en el posicionamiento de escáneres láser terrestres: una aplicación de la Matemática Discreta

E. Cabrera-Revuelta

Universidad de Cádiz

M.-J. Chávez, J. A. Barrera-Vera

Universidad de Sevilla

D. Zottoli

Università degli Studi di Salerno

El levantamiento arquitectónico consiste en un proceso de conocimiento, de carácter científico-técnico, que tiene por objeto adquirir la información formal, compositiva, constructiva y estructural y todos los datos necesarios para la restitución gráfica del edificio u objeto de interés.

El levantamiento arquitectónico mediante escáner láser es una actividad compleja en la que algunos pasos son susceptibles de una automatización discreta mientras que otros aún requieren una intensa intervención por parte de profesionales. Para obtener buenos resultados, es importante que las operaciones de levantamiento estén precedidas por una fase preliminar de planificación, que considere los siguientes aspectos: peculiaridades del área objeto de estudio; instrumentos de medición y técnicas a utilizar; gestión de datos.

Este trabajo se centra precisamente en la fase de planificación del levantamiento de un espacio interior y, en particular, en la optimización en el posicionamiento del escáner láser. Es decir, se trata de hallar el número y la posición óptimos desde los que se realiza una adquisición de datos completa. De esta forma, se consigue minimizar los desplazamientos y evitar redundancias o falta de datos.

Para lograr el objetivo de optimizar la recolección de datos aplicamos Grafos de Visibilidad, una noción bien conocida de la Matemática Discreta y de amplia aplicación en la Geometría Computacional. El software UCL DephtMap, basado en el análisis de un grafo de visibilidad, produce un mapa de posiciones visualmente integradas relativas a un espacio cuyos elementos están conectados entre sí a través de diferentes tipos de relaciones. Esta herramienta, aunque concebida para otros fines, puede ayudar a los profesionales del sector a identificar la mejor posición para ejecutar los escaneos.

Como caso práctico se muestra la aplicación de UCL Dephtmap en la planificación del levantamiento arquitectónico del espacio interior del Museo de Artes y Costumbres de Sevilla (Véase Figura 4.1). Una vez llevada a cabo la planificación, se ha procedido a ejecutar el levantamiento arquitectónico mediante escáner láser, pudiéndose comprobar que la toma de datos ha sido completa.

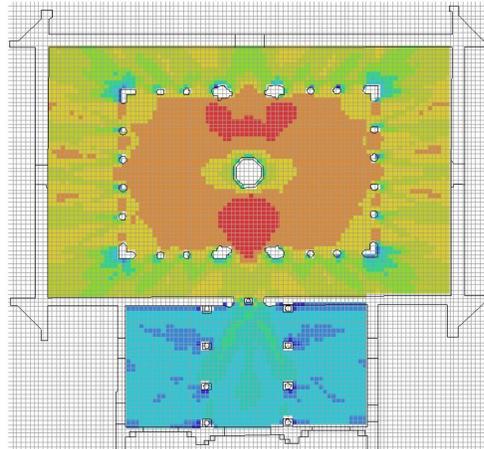


Figure 4.1: Mapa de visibilidad generado con UCL Depthmap del plano del Museo de Artes y Costumbres de Sevilla (patio y *hall*). Los colores más cálidos representan a las localizaciones más integradas visualmente

## Referencias

- [1] E. Cabrera-Revuelta, M. J. Chávez, J. A. Barrera Vera, Y. Fernández Rodríguez, M. Caballero Sánchez, Optimization of laser scanner positioning networks for architectural surveys through the design of genetic algorithms, *Measurement* 174 (2021). doi:10.1016/j.measurement.2020.108898.
- [2] E. Abajo, J. M. Delgado, Una propuesta del área de Matemáticas para el Taller de Arquitectura: Percepción del espacio mediante parámetros asociados a la visibilidad, *Modelling in Science Education and Learning* 11(2) (2018). doi: 10.4995/mse.2018.10088.
- [3] A. Turner, M. Doxa, D. O’Sullivan, A. Penn, From isovist to visibility graphs: a methodology for analysis of architectural space, *Environment and Planning B* 28 (2001) 103–121.

## Trabajo 5

# Comparando diferentes representaciones de álgebras no asociativas mediante estructuras combinatorias

D. Fernández-Ternero, V. M. Gómez-Sousa, J. Núñez-Valdés  
Universidad de Sevilla

Desde 2004, año de su introducción por Tian en su tesis doctoral [Jianjun Paul Tian, Evolution algebra theory [PhD thesis]. Riverside: University of California. 2004], las álgebras de evolución han sido objeto de numerosas publicaciones y muchos investigadores de diferentes campos las han utilizado como herramientas en el estudio de variadas disciplinas. Eso ha producido que, en la actualidad, el número de publicaciones que las tienen por objeto haya crecido exponencialmente. Por otra parte, la investigación, ya clásica, en álgebras no asociativas, particularmente las de Lie, Malcev, Jordan, Leibniz y Zinbiel, también se encuentra en continua expansión, al igual que también sucede lo mismo con la que trata de las distintas estructuras que conforman la Matemática Discreta. Esta comunicación se centra en el estudio de las diferentes representaciones de las álgebras no asociativas, entre ellas las álgebras de evolución, mediante estructuras combinatorias tipo grafos simples, dirigidos, seudografos o multigrafos y recíprocamente, las representaciones de estos últimos objetos de la Matemática Discreta mediante álgebras no asociativas. Entre estas representaciones y a partir de las realizadas por Carriazo, Fernández y Núñez [A. Carriazo, L.M. Fernández and J. Núñez, Combinatorial structures associated with Lie algebras of finite dimension, Linear Algebra and its Applications 389 (2004), 43-61] y la de Tian en su libro de 2008 [Jianjun Paul, Evolution algebras and their application, Lecture Notes in Mathematics 1921 (2008), Springer, Berlín], se hace un estudio comparativo del resto de las introducidas por varios otros autores, analizando sus características y enfatizando las principales ventajas y desventajas de cada una de ellas.

## Trabajo 6

# Dimensión equidistante de un grafo

A. González

Universidad de Sevilla

C. Hernando, M. Mora

Universitat Politècnica de Catalunya

Sea  $G$  un grafo conexo y  $S$  un conjunto de vértices de  $G$ . Decimos que  $S$  es un conjunto *distancia-igualador* de  $G$  si para todo par de vértices distintos  $x, y \in V(G) \setminus S$  existe un vértice  $w \in S$  tal que  $d(x, w) = d(y, w)$ . La *dimensión equidistante* del grafo  $G$ , que denotamos por  $eqdim(G)$ , es el mínimo cardinal de los conjuntos distancia-igualadores de  $G$ .

Estudiamos la relación entre  $eqdim(G)$  y otros parámetros del grafo: orden, grado máximo, dimensión métrica, cardinal mínimo de conjuntos doblemente resueltos. También damos cotas ajustadas de  $eqdim(G)$ , caracterizamos los grafos  $G$  que alcanzan las cotas inferiores y obtenemos cotas tipo Nordhaus-Gaddum para  $eqdim(G)$ . Finalmente, estudiamos los valores de  $eqdim(G)$  para varias familias de grafos como caminos, ciclos, grafos bipartitos y damos algunos resultados parciales para grafos de Johnson (para más detalles, ver [1]).

## Agradecimientos

A. González parcialmente financiado por el grupo de investigación en Educación Matemática FQM-226 de la Junta de Andalucía. C. Hernando y M. Mora parcialmente financiadas por proyecto PID2019-104129GB-I00 (MICINN). M. Mora también financiada por el proyecto Europeo H2020-734922-CONNECT.

## Referencias

- [1] A. González, C. Hernando, M. Mora. *The Equidistant Dimension of Graphs*, 2021, <https://arxiv.org/abs/2107.10805>

## Trabajo 7

# La inversa de grupo de matrices circulantes con cuatro parámetros

Á. Carmona, A. M. Encinas, M. J. Jiménez, M. Mitjana

Universitat Politècnica de Catalunya

La necesidad de resolver sistemas lineales con matrices circulantes aparece en muchas aplicaciones, que van desde la solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales con condiciones de contorno periódicas hasta la teoría de códigos, la estadística, el análisis de series temporales, el procesamiento de imágenes o cuando aproximamos funciones periódicas con splines. A pesar de que el problema de calcular la inversa de grupo de una matriz circulante puede considerarse resuelto desde un punto de vista teórico o algebraico, incluso para dimensiones pequeñas el costo computacional para encontrar la solución puede ser muy alto.

Diferentes enfoques para calcular la inversa de una matriz circulante se han centrado en clases especiales de matrices circulantes. Para matrices estructuradas con tres parámetros, la aplicación de la FFT conduce a algoritmos para resolver sistemas circulantes que permiten reducir el coste computacional al evaluar la inversa.

En esta comunicación presentamos nuestros últimos avances en el cálculo de la inversa de grupo de una familia de matrices circulantes con cuatro parámetros complejos. En concreto, obtenemos expresiones analíticas para los coeficientes de su inversa de grupo. Esto significa que simplemente revisando algunas relaciones entre los cuatro parámetros podemos calcular explícitamente los coeficientes de la inversa del grupo y no hay necesidad de aplicar ningún método numérico para calcularlos. En nuestro caso, el coste computacional de calcular la inversa de grupo de esta clase de matrices se reduce a la evaluación de un polinomio. Además, nuestra metodología se aplica tanto al caso invertible como al singular. Las técnicas que utilizamos están relacionadas con la solución de problemas de contorno asociados con ecuaciones en diferencias lineales de primer o segundo orden y, por lo tanto, involucran la evaluación de polinomios de Chebyshev.

## Trabajo 8

# Asymptotic $\omega$ -primality of finitely generated cancellative monoids

D. Marín-Aragón, J. I. García-García, A. Vignerón-Tenorio

Universidad de Cádiz

Let  $S$  be a commutative, cancellative, reduced and finitely generated monoid. These conditions imply that  $S$  is isomorphic to a quotient of the form  $\mathbb{N}^p / \sim_M$  for some positive integer  $p$  and some subgroup  $M$  of  $\mathbb{Z}^p$ . A monoid is called cancellative if for all  $a, b, c \in S$  such that  $a + c = b + c$ ,  $a = b$ , and it is called reduced if  $S \cap (-S) = \{0\}$ .

Problems involving non-unique factorization in atomic monoids and integral domains have gathered much recent attention in the mathematical literature. Let  $S$  be a monoid, the  $\omega$ -invariant is a well-established invariant in the theory of non-unique factorizations, and appears also in the context of direct-sum decompositions of modules. This invariant essentially measure how far an element of an integral domain or a monoid is from being prime.

Associated with the  $\omega$ -primality of an element  $a$  of a monoid  $S$  there is its asymptotic version, the asymptotic  $\omega$ -primality or  $\bar{\omega}$ -primality and denoted by  $\omega(a)$ . This parameter has been object of study in several works, for instance, the  $\bar{\omega}$ -primality is studied for numerical semigroups generated by two elements and it is given a formula for its computation, and, it is computed for numerical monoids, but no other studies provide methods to calculate this invariant for other types of monoids. The asymptotic  $\omega$ -primality of a monoid  $S$  with set of atoms  $\mathcal{A}(S) = \{a_1, \dots, a_t\}$ , denoted by  $\bar{\omega}(S)$ , is defined as the maximum of the set  $\{\bar{\omega}(S)(a_i) \mid a_i \in \mathcal{A}(S)\}$ . The definition of  $\bar{\omega}(S)(a)$  is  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(na)/n$ . Thus, the  $\omega$ -primality of a element is computed using discrete sets of points, but to compute the  $\bar{\omega}(S)$ -primality it is necessary to use continuous sets of points. In this work, we see how to go from discrete to continuous sets and we give a method to compute this invariant in a huge class of finitely generated cancellative monoids.

## Trabajo 9

# La importancia de las $G$ -inversas en caminos aleatorios

Á. Carmona, M. J. Jiménez, A. Martín

Universitat Politècnica de Catalunya

En el ámbito de caminos aleatorios, si suponemos que el sistema se encuentra en un estado inicial  $s_i$ , el número de pasos esperado para que el sistema alcance el estado  $s_j$  vienen descrito por el llamado Mean First Passage Time (MFPT), que se denota por  $m_{ij}$ . La matriz que caracteriza el MFPT puede escribirse en términos de  $g$ -inversas del Laplaciano combinatorio.

Si bien el MFPT es un elemento que permite caracterizar caminos aleatorios, no es el único. Es bien conocido que el tiempo que tarda el sistema en llegar a un estado  $j$  aleatorio, partiendo de un estado inicial  $i$ , es una constante que no depende de este estado  $i$  inicial. Es la llamada constante de Kemeny, que también puede ser expresada mediante el uso de  $g$ -inversas del mencionado Laplaciano.

En esta comunicación se pondrá de manifiesto que la relación existente entre caminos aleatorios y los problemas de Poisson, Dirichlet y Neumann para el Laplaciano permite obtener expresiones tanto para el MFPT como para la constante de Kemeny en términos de  $g$ -inversas.

## Trabajo 10

# Dominación [5]-Romana en grafos. Generalización

M. P. Álvarez, M. A. Mateos Camacho, J. C.  
Valenzuela-Tripodoro  
Universidad de Cádiz

Una función  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  es una *función de dominación Romana* (RDF) en  $G$ , si cada vértice  $u \in V$  para el cual  $f(u) = 0$  es adyacente a, al menos, un vértice  $v$ , tal que  $f(v) = 2$ . El peso de una RDF es el valor  $f(V(G)) = \sum_{u \in V(G)} f(u)$ . El *número de dominación Romana*  $\gamma_R(G)$  es el peso mínimo de una RDF en  $G$ . Es evidente que el conjunto de vértices con etiqueta positiva en una RDF es un conjunto de vértices dominante, por lo que  $\gamma(G) \leq \gamma_R(G)$ . Y por otro lado, dado un conjunto de vértices dominantes podemos construir una RDF asignando un 2 a cada uno de ellos y 0 a los demás vértices del grafo, con lo cual  $\gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$ .

En los trabajos de Beeler y otros (2016), Álvarez y otros (2021), Amjadi y otros (2021), se introducen variantes de la dominación Romana como versiones más robustas, en la que cualquier ciudad del imperio deberá poder ser defendida por más de una legión, estando situadas las legiones requeridas en la defensa en en la propia ciudad atacada o alguna de sus vecinas.

En este trabajo presentamos una generalización de la dominación Romana en la que consideramos que cualquier ciudad “indefensa”, ante un ataque repentino, tendrá que ser defendida con, al menos,  $k$  legiones, que podrán desplazarse desde ciudades vecinas, pero nunca dejando a una de estas “ciudades vecinas fuertes” desprotegida. Nos centramos particularmente en la dominación Romana quintuple o Dominación [5]-Romana de un grafo. En este caso, etiquetando los vértices del grafo con etiquetas del conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , se debe garantizar que cada vértice  $v \in V$  con  $f(v) < 5$ , se verifica que

$$f(AN[v]) \geq |AN(v)| + k,$$

donde  $AN[v] = \{u \in N(v) : f(u) \geq 1\} \cup \{v\}$ .

Establecemos varias cotas para el número de dominación Romana quintuple, denotado por  $\gamma_{[5R]}(G)$ , en cualquier grafo. También caracterizamos los grafos conexos  $G$  con  $5 \leq \gamma_{[3R]}(G) \leq 10$ . Además, se dan valores exactos del número de dominación Romana quintuple para algunas familias de grafos.

# Trabajo 11

## Paired-domination in near-triangulations

M. Claverol, C. Hernando, M. Maureso, M. Mora

Universitat Politècnica de Catalunya

J. Tejel

Universidad de Zaragoza

A subset  $D$  of vertices of a graph  $G$  is *paired-dominating* if every vertex not in  $D$  is adjacent to at least one vertex in  $D$  and the subgraph induced by  $D$  has a perfect matching. The *paired-domination number*, denoted by  $\gamma_{pr}(G)$ , is the minimum cardinality among all paired-dominating sets of  $G$ . A subset  $D$  of vertices in a graph  $G$  is *total dominating* if every vertex is adjacent to at least one vertex in  $D$ . The *total domination number* of  $G$ , denoted by  $\gamma_t(G)$ , is the minimum cardinality among all total dominating sets. Since every paired-dominating set is a total dominating set, we have  $\gamma_t(G) \leq \gamma_{pr}(G)$ .

A *near-triangulation* is a biconnected planar graph admitting a plane embedding such that all of its faces are triangles except possibly the outer face. The total domination number of a near-triangulation  $G$  of order  $n$  satisfies  $\gamma_t(G) \leq \lfloor \frac{2n}{5} \rfloor$ , whenever  $n \geq 5$ , apart from two exceptions [?]. By applying similar techniques to those used in [1], we show that  $\gamma_{pr}(G) \leq 2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  for any near-triangulation  $G$  of order at least 4.

### Referencias

- [1] M. Claverol, A. García, G. Hernández, C. Hernando, M. Maureso, M. Mora, J. Tejel, Total domination in plane triangulations. *Discrete Mathematics*, 344(2021) 112179.  
<https://doi.org/10.1016/j.disc.2020.112179>

## Trabajo 12

# Cooperación en sistemas ecológicos mutualistas

J. R. Portillo, F. Soler-Toscano, J. A. Langa

Universidad de Sevilla

Aplicar grafos a los sistemas dinámicos permite describir múltiples fenómenos en diferentes áreas de la ciencia. Un ejemplo es la Teoría de la Información Integrada, que es hoy en día la teoría general de la Conciencia más desarrollada. En un estudio de 2018 se define el concepto de *Estructura Informacional*, asociada al atractor global en cada momento temporal del sistema mediante grafos y sistemas dinámicos [1].

Una de las disciplinas donde se halla un gran número de aplicaciones de la Teoría de Grafos es la Ecología. En este trabajo, presentamos un marco matemático similar al anterior y su aplicación a ese área, aplicándolo al estudio de la estabilidad estructural de cada punto estacionario. Para ello, introducimos una generalización del concepto de estabilidad estructural, la *Estabilidad Estructural Global*.

Estudiamos en detalle, matemática y computacionalmente, las zonas que caracterizan los diferentes niveles de biodiversidad en grafos bipartitos que describen sistemas mutualistas y antagonicos de dinámica poblacional. También investigamos la dependencia de la región de máxima biodiversidad de un sistema de su matriz de conectividad, la cual está asociada a un (di)grafo ponderado.

Como la topología de la red no determina completamente la robustez de la dinámica de una red compleja, estudiamos la correlación entre la estabilidad estructural y varios parámetros de los grafos asociados. Realizamos un estudio sistemático de grafos, utilizando grafos procedentes de estudios de campo biológicos (10 redes mutualistas de plantas y animales dispersadores de semillas) y comparándolos con conjuntos de 1000 grafos sintéticos generados aleatoriamente por ordenador. Se han analizado el papel de las medidas de centralidad y modularidad, concluyendo la importancia de la fuerza de cooperación entre nodos a la hora de describir áreas de máxima biodiversidad. De hecho, mostramos que los parámetros de cooperación son el papel central para la biodiversidad, mientras que otras medidas actúan como funciones secundarias de apoyo. Los datos de este estudio pueden encontrarse en [2].

## Referencias

- [1] F. J. Esteban, J. Galadí, J. A. Langa, J. R. Portillo, F. Soler-Toscano, Informational structures: A dynamical system approach for integrated information. *PLOS Computational Biology*, 14(9) (2018) 1–33.
- [2] J. R. Portillo, F. Soler-Toscano, J. A. Langa, Global structural stability and the role of cooperation in mutualistic systems. *bioRxiv*, 2021.

## Trabajo 13

# Hyperbolicity of some intersection graphs

R. Reyes

Universidad Carlos III de Madrid

Gromov hyperbolicity is an interesting geometric property, and so it is natural to study it in the context of geometric graphs. A geometric graph is a graph in which the vertices or edges are associated with geometric objects. Two of the main classes of geometric graphs are Euclidean graphs and intersection graphs. A graph is Euclidean if the vertices are points in  $\mathbb{R}^n$  and the length of each edge connecting two vertices is the Euclidean distance between them (this makes a lot of sense with the cities and roads analogy commonly used to describe graphs). An intersection graph is a graph in which each vertex is associated with a set and in which vertices are connected by edges whenever the corresponding sets have a nonempty intersection.

An *interval graph* is the intersection graph of a family of intervals on the real line. It has one vertex for each interval in the family, and an edge between every pair of corresponding vertices to intervals that intersect. A *circular-arc graph* (or *circular graph*) is the intersection graph of a family of arcs on the unit circle  $\mathbb{S}^1$ . It has one vertex for each arc in the family, and an edge between every pair of corresponding vertices to arcs that intersect.

In this work we study the hyperbolicity constant for both families of graphs.

## Referencias

- [1] J. C. Hernández-Gómez, R. Reyes, J. M. Rodríguez, J. M. Sigarreta, Mathematical Properties on the Hyperbolicity of Interval Graphs, *Symmetry* 9(11) (2017), article ID 255.
- [2] R. Reyes, J. M. Rodríguez, J. M. Sigarreta, M. Villeta, On the hyperbolicity constant of circular-arc graphs, *Discrete Applied Mathematics* 263 (2019) 244–256.

## Trabajo 14

# Pricing in hub problems

A. M. Rodríguez Chía, G. Erdogan, M. Battarra

Universidad de Cádiz

This paper introduces the joint problem of locating hubs on a network and determining transportation prices between the hubs. Two levels of decision makers are present in the problem acting non-cooperatively: hub transportation provider and customers. The objective of the hub transportation provider is to locate hubs and to set the prices (per unit of commodity) of crossing the hub arcs maximizing its profit, whereas the customers aim is to send their commodities, in the cheapest way, having the possibility of using the hub arcs at the price set by the hub transportation provider or using the existing network at a predefined tariff. The problem is modeled as a nonlinear bilevel programming formulation, which is in turn linearized, and strengthened through variable reductions as well as valid inequalities. The case in which the price of each hub arc is determined by applying a common discount factor to the predefined tariff in the existing network is also studied. Computational results of mixed integer programming models and a metaheuristic on instances adapted from the literature are presented.

## Trabajo 15

# Coloraciones totales que distinguen vértices adyacentes para el producto corona de gráficas

R. Zuazua

Universidad Nacional Autónoma de México

Una  $k$ -coloración total que distingue vértices adyacentes de una gráfica  $G$  es una  $k$ -coloración total de  $G$  tal que cualesquiera dos vértices adyacentes tienen su conjunto de colores distintos, donde el conjunto de colores de un vértice  $v$ ,  $C_f^G(v)$ , es  $\{f(v)\} \cup \{f(vu) \mid u \in V(G), vu \in E(G)\}$ . En 2005 Zhang et al. conjeturaron que toda gráfica simple  $G$  tiene una  $(\Delta(G) + 3)$ -coloración total que distingue vértices adyacentes. En esta charla presentaremos resultados que confirman la conjetura previa para varios productos corona de gráficas.

Este es un trabajo conjunto con Hanna Furmanczyk de la Universidad de Gdansk, Polonia.

## Referencias

- [1] H. Furmanczyk, R. Zuazua, Adjacent Vertex Distinguishing Total Coloring of Corona Product of Graphs. Preprint.